402. Normale Matrix ニツイテ

淺　野　啓　三（阪大）

本紙89号デ近藤君が normale Matrix ノ Elementarteiler が linear ニナルコトヲ述ベラレタが，ソレニツイテ先日，須田好雄氏が次ノ定理ノ成立スルコトヲ注意シテ來ラレマシタ。

定理： Matrix A が unitäre Matrix ニヨツテ對角行列ニウツサレルタメニ必要且充分ナ條件ハ A が normal ナルコト，即チ $A\bar{A}'=\bar{A}'A$ ナルコトデアル。

コレハヨク知ラレタ事實デ,[(1)] 任意ノ Matrix が unitäre Transformation ニヨツテ Diagonal ノ下半（又ハ上半）ヲ 0 ニナシ得ルコト[(2)]ト，normal ト云フ性質が unitäre Transformation ニヨツテ不變デアルコトカラ直チニ得ラレマス。[(3)]

---

(1) O. Toeplitz, Math. Zeit. 2 (1918) S. 192. A. Wintner, Spektraltheorie der Unendlichen Matrizen S. 24.

(2) 荒又氏： 代数學（岩波講座）p. 207 ノ証明參照. アノ方法デ容易ニ証明出來ル. I. Schur: Math. Ann. 66 (1909) A. Winter, a. a. O. S. 21–23.

(3) 須田氏ノ証明モコレニヨツタモノデアル. 尚須田氏ハ次ノ定理ヲ述べ．極ク特殊ノ場合ニツイテ証明サレテイルが．一般ニ成立スルコトが容易ニ分ル。

定理： $S^{-1}AS=\begin{pmatrix}\lambda_1 & & 0\\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n\end{pmatrix}$ ナラバ $S^{-1}\bar{A}'S=\begin{pmatrix}\bar{\lambda}_1 & & 0\\ & \ddots & \\ 0 & & \bar{\lambda}_n\end{pmatrix}$ 但シ A ハ normal.

証明： $B=\begin{pmatrix}\lambda_1 & & 0\\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n\end{pmatrix}$ ト可換ナ Matrix ハ $\bar{B}$ トモ可換ニナル

normale Matrix A が reelle Matrix ノトキハ Aノ Eigenwert ガスベテ reell ナラバ、スベテハ實数体ノ範囲デ出来ルカラ、Aハ reell-orthogonale Matrix ニヨッテ Diagonalform ニセラレルワケデスが, Eigenwert が komplex ニナル場合ニハ次ノ定理が成立シマス, コンナコトハ何処カニアルコトデセウカ。

定理: Aヲ reelle normale Matrix トスル $AA' = A'A$. Aハ orthogonale Matrix デ次ノヤウナ Normalform ニスルコトが出来ル。

$$(1)\quad \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & & & 0 \\ & \ddots & & & & \\ & & \lambda_r & & & \\ & & & A_1 & & \\ & & & & \ddots & \\ 0 & & & & & A_s \end{pmatrix},\quad A_\nu = \begin{pmatrix} a_\nu & b_\nu \\ -b_\nu & a_\nu \end{pmatrix}\quad (\nu = 1, 2, \cdots\cdots, s)$$

コヽニ $\lambda_1, \cdots\cdots, \lambda_r$ ハ Aノ reelle Eigenwerte, $\mu_\nu = a_\nu + b_\nu i$, $\bar{\mu}_\nu = a_\nu - b_\nu i$ ハ Aノ Eigenwert デ konjugient-komplexe Zahlen ノ Paar トナルモノデアル。(4)

証明: A ハトニカク unitäre Matrix U デ

$$UA\bar{U}' = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & & & 0 \\ & \ddots & & & & \\ & & \lambda_r & & & \\ & & & A_1^* & & \\ & & & & \ddots & \\ 0 & & & & & A_s^* \end{pmatrix},\quad A_\nu^* = \begin{pmatrix} a_\nu + i b_\nu & 0 \\ 0 & a_\nu - i b_\nu \end{pmatrix}$$

コトカラ容易ニ分ル。

先ヅ A が normal ナルコトカラ $UA\bar{U}' = B$ トナル Unitäre Matrix U がアル. 従ッテ $U\bar{A}'U^{-1} = \bar{B}$. $(US)^{-1} B\, US = S^{-1}AS = B$ ヨッテ $(US)^{-1}\bar{B}\, US = \bar{B}$. 即チ $S^{-1}\bar{A}'S = \bar{B}$.

トナル。

$$\mathfrak{V}=\begin{pmatrix} E_r & & 0 \\ & \sigma & \\ & & \ddots \\ 0 & & \sigma \end{pmatrix}, \quad \sigma=\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}}, & \frac{i}{\sqrt{2}} \\ \frac{i}{\sqrt{2}}, & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

トスレバ $\mathfrak{V}$ ハ unitär デ

$$\sigma A_\nu^* \bar{\sigma}' = \begin{pmatrix} a_\nu & b_\nu \\ -b_\nu & a_\nu \end{pmatrix} = A_\nu$$

トナルカラ $\mathfrak{V}\mathfrak{U}A\bar{\mathfrak{U}}'\bar{\mathfrak{V}}'$ ガ (1) ノ形ニナリ，A ガ Unitäre Matrix ニヨッテ Normalform ニセラレル。一般ニ次ノ補助定理ノ成立スルコトカラ，定理ノ成立スルコトガ分ル。

lemma: A, B ヲ reelle Matrizen, $\mathfrak{U}$ ヲ unitäre Matrix トスル。$\bar{\mathfrak{U}}'A\mathfrak{U}=B$ ナラバ $P'AP=B$ トナル reell-orthogonale Matrix P ガ存在スル。

証明: $B=\bar{\mathfrak{U}}'A\mathfrak{U}$, $B'=\mathfrak{U}'A'\bar{\mathfrak{U}}$. A', B' ハ reell ダカラ $B'=\bar{\mathfrak{U}}'A'\mathfrak{U}$ 即チ $A\mathfrak{U}=\mathfrak{U}B$, $A'\mathfrak{U}=\mathfrak{U}B'$. 従ッテ $\mathfrak{U}=\mathfrak{U}_1+i\mathfrak{U}_2$ ($\mathfrak{U}_1$, $\mathfrak{U}_2$, reell) トスレバ $A\mathfrak{U}_1=\mathfrak{U}_1B$, $A\mathfrak{U}_2=\mathfrak{U}_2B$, x ヲ實數トシテ $Q=\mathfrak{U}_1+x\mathfrak{U}_2$ トスレバ

---

(4) A ガ orthogonal ノトキハヨク知ラレタ定理デス．コノトキハ A ノ Eigenwert ハ絶對値ガ 1 ダカラ，A ハ次ノ形ニ transform サレルコトガ分ル。

$$\begin{pmatrix} A_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & A_m \end{pmatrix}, \quad A_\nu=\begin{pmatrix} \cos\theta_\nu & \sin\theta_\nu \\ -\sin\theta_\nu & \cos\theta_\nu \end{pmatrix}$$

但シ A ノ grad n ガ奇數ノトキハ $A_1=\pm 1$, n ガ偶數ノトキハ Det. $A=-1$ ノ場合ニ $A_1=\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ ニナルモノトスル)
ソノ証明ハ私ノ知ル限リデハ余リ簡單デナイ様デス

$$AQ = QB.$$ 同様ニ $A'Q = QB'$, 即チ $Q'A = BQ'$

従ッテ

(2) $\quad QQ'A = AQQ'.$

$|Q| = |U_1 + x U_2| \neq 0$. 故ニ $|Q| \neq 0$ トナル實數 x ガ存在スル.

今ソノ様ニ x ヲキメル。

(3) $\quad Q^{-1}AQ = B. \qquad A = QBQ^{-1}$

$P'AP = B$ トナル *orthogonale Matrix* P ガ存在スレバ

$X = QP'$ トシテ

(4) $\quad XA = AX, \qquad XX' = QQ'.$

逆ニ (4) ヲ満足スル *reelle Matrix* X ガアレバ, $P = X^{-1}$

トスレバ

$$P'P = Q'X'^{-1}X^{-1}Q = Q'(XX')^{-1}Q = Q'(QQ')^{-1}Q = E$$
$$P^{-1}AP = Q^{-1}XAX^{-1}Q = Q^{-1}AQ = B$$

カヽル X ノ存在スルコトヲ次ノヤウニ証明スル。

$QQ' = QEQ'$ ハ *pos. definit* ナ *symmetrische Matrix*

デアルカラ *orthogonale Matrix* M ヲ適當ニトッテ

(5) $\quad MQQ'M' = \begin{pmatrix} \alpha_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \alpha_n \end{pmatrix} \quad (\alpha_i > 0)$

トスルコトガ出來ル。今 X ヲ

(6) $\quad MXM' = \begin{pmatrix} \sqrt{\alpha_1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \sqrt{\alpha_n} \end{pmatrix} \quad (\sqrt{\alpha_i} > 0)$

ニヨッテキメレバ, X ハ *symmetrisch* デ $XX' = X^2 = QQ'$

トナルコトハ明カデアル。又 (2) ト (5) カラ $\begin{pmatrix} \alpha_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \alpha_n \end{pmatrix}$ ハ

MAM' ト可換.

然ルトキハ $\begin{pmatrix} \sqrt{\alpha_1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \sqrt{\alpha_n} \end{pmatrix} = MXM'$ ガ MAM' ト可換ナルコトガ容易ニ分リ，従ッテ X ト A トハ可換デアル。